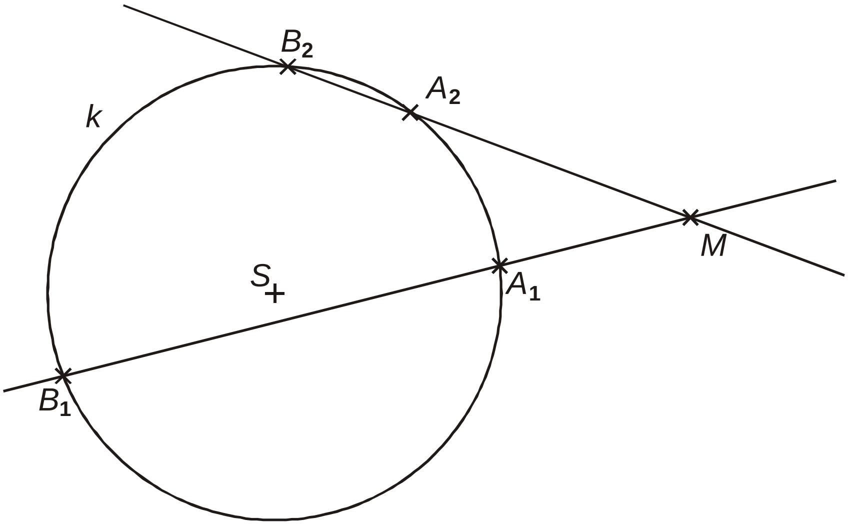
3.2.11 Mocnost bodu ke kružnici

Předpoklady: 030209

Př. 1: Je dána kružnice k a bod M, ležící vně kružnice k. Veď bodem M dvě různé sečny kružnice k p_1 a p_2. Průsečíky sečny p_1 s kružnicí k označ A_1, B_1. Průsečíky sečny p_2 s kružnicí k označ A_2, B_2. Změř potřebné vzdálenosti a spočti součiny: $|MA_1|\cdot|MB_1|$, $|MA_2|\cdot|MB_2|$. Vysvětli.



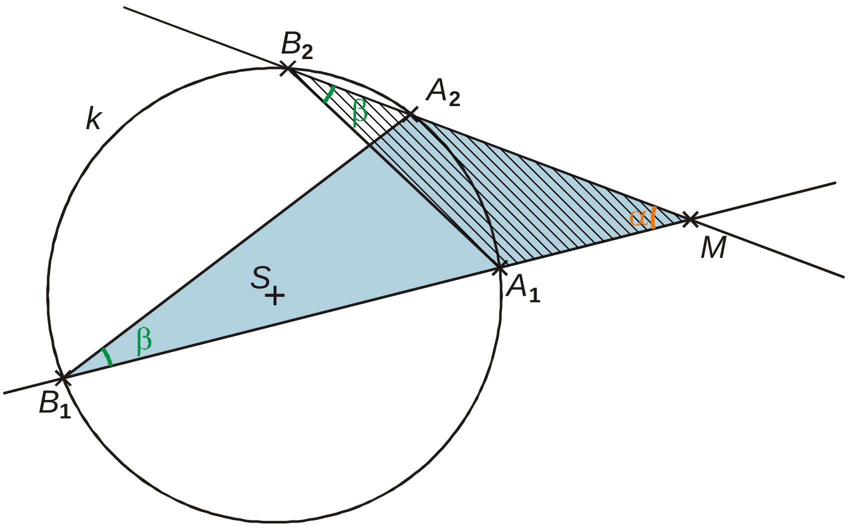
$|MA_1| = 2,61$, $|MB_1| = 8,57$, $|MA_2| = 3,96$, $|MB_2| = 5,69$

$|MA_1|\cdot|MB_1| = 2,61\cdot 8,57 = 22,4$ $\qquad$ $|MA_2|\cdot|MB_2| = 3,95\cdot 5,68 = 22,4$

Oba součiny se (v rámci přesnosti měření) rovnají.

Ke stejnému výsledku dojdeme pro každé konkrétní zadání $\Rightarrow$ nejde o náhodu, ale o zákonitost. Proč?

Dokreslíme do obrázku další dvě úsečky: A_1B_2 a A_2B_1:



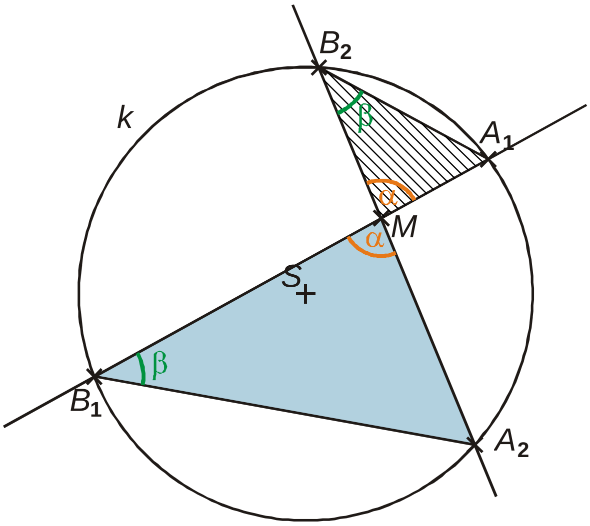
Získali jsme dva trojúhelníky MA_2B_1 a MA_1B_2. Oba trojúhelníky se shodují ve dvou úhlech:

- α je společný úhel u společného vrcholu *M*,
- β jsou shodné obvodové úhly nad obloukem A_1A_2,

$\Rightarrow$ oba trojúhelníky jsou si podobné.

Použijeme poměry odpovídajících si stran: $\frac{|MA_1|}{|MB_2|} = \frac{|MA_2|}{|MB_1|} \Rightarrow |MA_1| \cdot |MB_1| = |MA_2| \cdot |MB_2|$.

Př. 2: Rozhodni, zda rovnost $|MA_1| \cdot |MB_1| = |MA_2| \cdot |MB_2|$ platí i v případě, že bod *M* leží uvnitř kružnice.



Opět najdeme dva podobné trojúhelníky MA_2B_1 a MA_1B_2 se shodnými úhly:

- α jsou vrcholové úhly u společného vrcholu *M*,
- β jsou shodné obvodové úhly nad obloukem A_1A_2.

I v tomto případě tedy platí: $|MA_1| \cdot |MB_1| = |MA_2| \cdot |MB_2|$.

Pedagogická poznámka: Slabší studenti, kteří nezvládnou nalézt podobné trojúhelníky, mohou zkusit alespoň přeměření úseček a výpočet součinu.

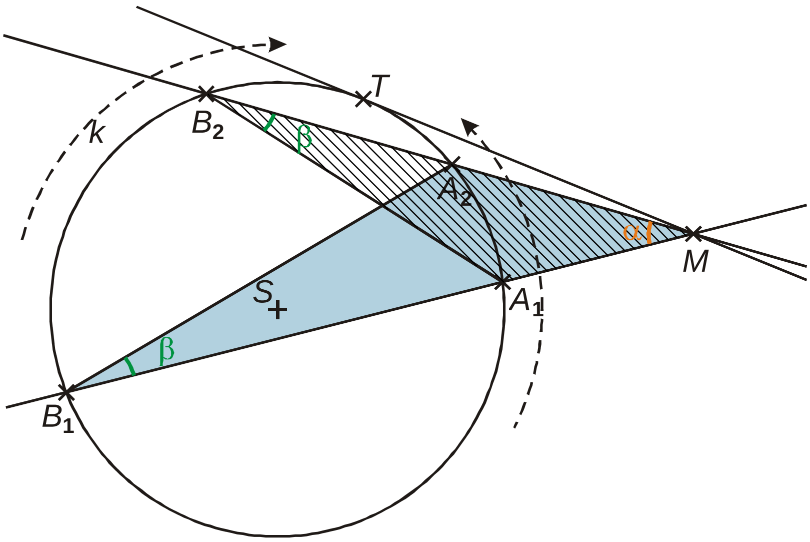
Hodnota součinu $|MA| \cdot |MB|$ je pro daný bod *M* a danou kružnici *k* vždy stejná a nezáleží na volbě sečny $\Rightarrow$ součin $|MA| \cdot |MB|$ charakterizuje polohu bodu *M* vůči kružnici $\Rightarrow$ má smysl se součinem $|MA| \cdot |MB|$ zabývat.

Libovolnému bodu *M* roviny lze přiřadit reálné číslo *m*, pro něž platí:

- $|m| = |MA| \cdot |MB|$, kde *A*, *B* jsou průsečíky dané kružnice *k* s libovolnou sečnou procházející bodem *M*.
- $m > 0$ pro body *M* vně kružnice,
  $m = 0$ pro body $M \in k$,
  $m < 0$ pro body *M* uvnitř kružnice.

Číslo *m* se nazývá mocnost bodu *M* ke kružnici *k*.

Př. 3: Urči pomocí mocnosti bodu ke kružnici délku tečny vedoucí z bodu M ke kružnici k.



Vztah $|MA_1|\cdot|MB_1| = |MA_2|\cdot|MB_2|$ platí pro libovolnou sečnu $\Rightarrow$ pohybujeme sečnou tak, aby se postupně blížila tečně MT $\Rightarrow$

- bod A_2 se blíží k bodu T $\Rightarrow$ $|MA_2|$ se blíží k $|MT|$,
- bod B_2 se blíží k bodu T $\Rightarrow$ $|MB_2|$ se blíží k $|MT|$,

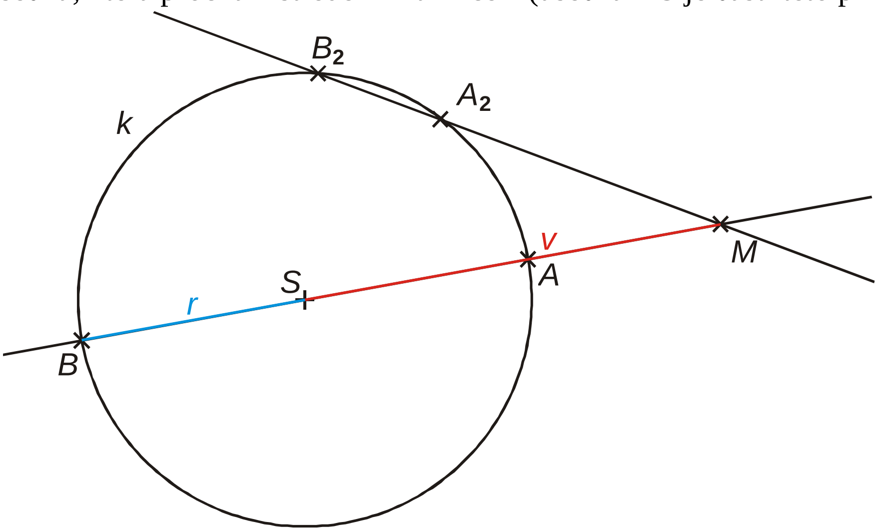
$\Rightarrow$ součin $|MA_2|\cdot|MB_2|$ se blíží k součinu $|MT|\cdot|MT| = |MT|^2$.

Platí tedy: $|MA_2|\cdot|MB_2| = |MT|^2$ $\Rightarrow$ $|m| = |MT|^2$ $\Rightarrow$ $\sqrt{|m|}$.

Poloha bodu M vůči kružnici k je kromě mocnosti bodu dána také vzdáleností $v = |MS|$ a poloměrem kružnice r $\Rightarrow$ musí existovat způsob jak vypočítat mocnosti bodu ke kružnici pomocí v a r.

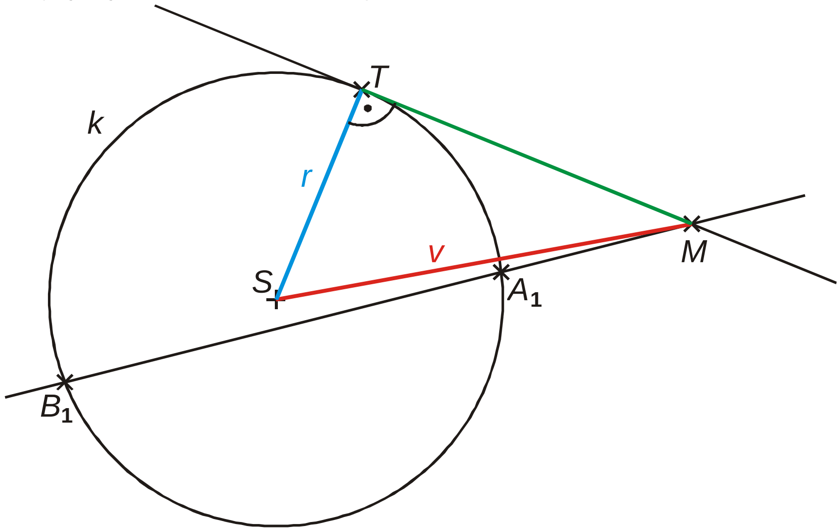
Př. 4: Najdi vzorec pro výpočet mocnosti bodu M vzhledem ke kružnici k pomocí vzdálenosti $v = |MS|$ a poloměru kružnice k.

Mocnost bodu vzhledem ke kružnici můžeme určit pomocí libovolné sečny $\Rightarrow$ zvolíme sečnu, která prochází středem kružnice k (úsečka MS je částí této přímky).



Vyjádříme vzdálenosti: $|MA| = v - r$, $|MB| = v + r$.
$|m| = |MA| \cdot |MB| = (v-r)(v+r) = v^2 - r^2$

Dodatek: Stejný výsledek získáme i z jiného obrázku:



Trojúhelník *MST* je pravoúhlý, proto platí: $|MT|^2 = |MS|^2 - |ST|^2 \Rightarrow |m| = v^2 - r^2$.

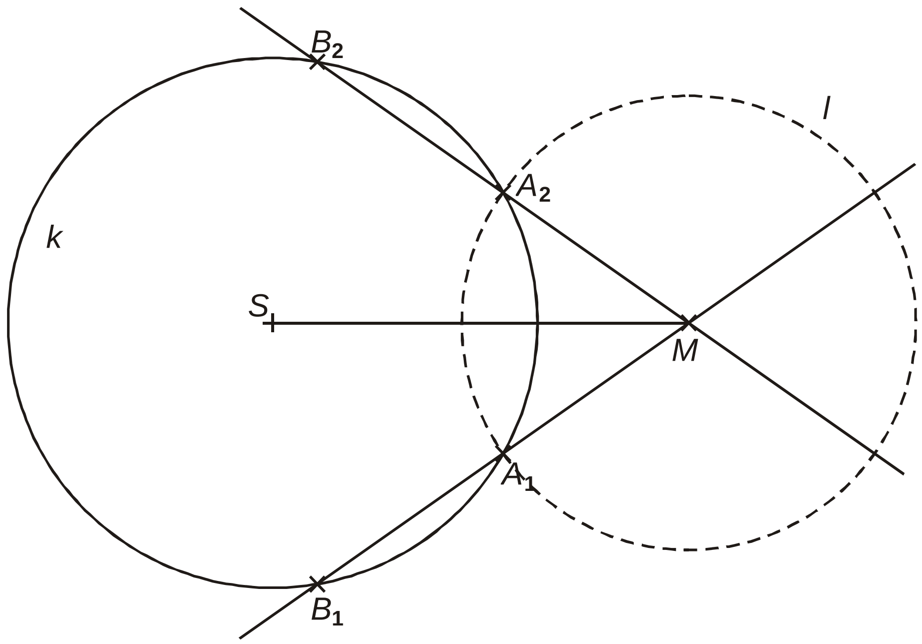
Př. 5: Je dána kružnice $k(S; r = 7\,\text{cm})$ a bod M; $|MS| = 11\,\text{cm}$. Najdi takovou sečnu kružnice *k* procházející bodem *M*, aby jeden její průsečík byl středem úsečky s krajními body v bodě *M* a v druhém průsečíku.

Označíme průsečík sečny, který je blíže k bodu *M* jako *A*, potom platí: $|MB| = 2|MA|$.

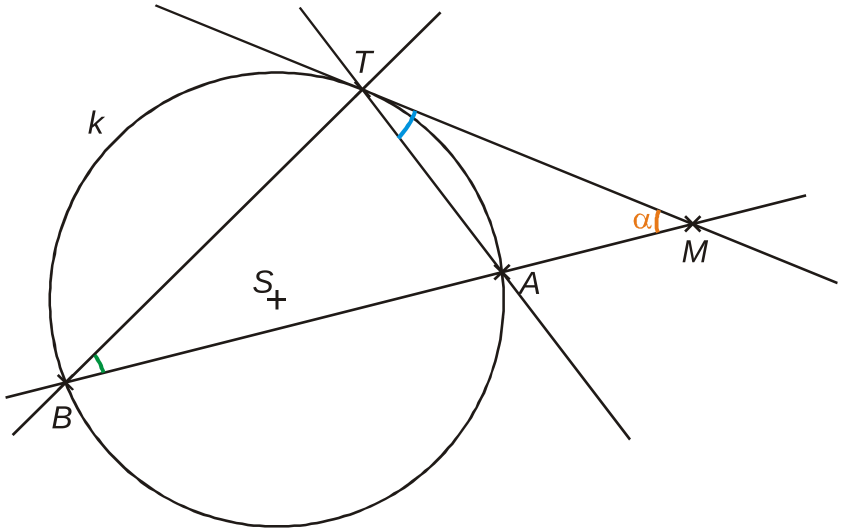
Pro mocnosti bodu *M* vzhledem ke kružnici *k*: $|m| = |MA| \cdot |MB| = |MA| \cdot 2|MA| = 2|MA|^2$.

Určení mocnosti pomocí vzdálenosti $|MS|$ a poloměru *r*: $|m| = v^2 - r^2 = 11^2 - 7^2 = 72$.

$2|MA|^2 = |m| \Rightarrow |MA| = \sqrt{\frac{|m|}{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}}\,\text{cm} = 6\,\text{cm} \Rightarrow$ bod *A* leží na kružnici $l(M; 6\,\text{cm})$.

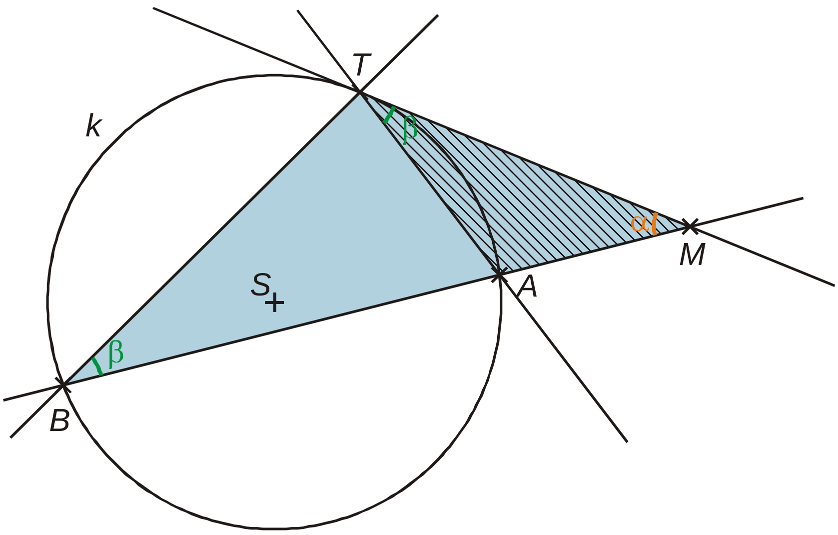


Př. 6: (BONUS) Dokaž z nakresleného obrázku vztah $|MA| \cdot |MB| = |MT|^2$.



- Vyznačený úhel *MTA* je úsekovým úhlem menšího oblouku *AT*,
- vyznačený úhel *TBA* je obvodovým úhlem menšího oblouku *AT*,

$\Rightarrow$ oba vyznačené úhly jsou shodné $\Rightarrow$
trojúhelníky *MBT* a *MTA* jsou si podobné (shodují se také ve společném úhlu α).



Z poměrů stran trojúhelníků MBT a MTA: $\frac{|MB|}{|MT|} = \frac{|MT|}{|MA|} \Rightarrow |MA| \cdot |MB| = |MT|^2$.

Př. 7: Petáková:
strana 89/cvičení 57

Shrnutí: